145. p 進数体ニオケル或ル群ニツイテ

國吉秀夫（東北大）194°.I.8

§1. k ヲ p 進数体、Ω/k ヲ有限拡大トシ $G(k/\Omega)=(A\in\Omega;\ N_{\Omega/k}A=1)$ トシマス。Ω/k Abel ノトキ、$G(k/\Omega)$ ニツイテ、局所類体論ノ Anordnungssatz ニ類似シタ定理ガ成立シマス。之ハ淡中先生ガ紙上談話会 236 ニテ示サレタモノデスガ、其所デハ $G(k/\Omega)$ ノ構造ニツイテノ定理ガ載ッテ居リマス。之ハ中山、森島両先生ニヨリ、一般ノ場合ニ拡張サレマシタガ、(247, 252, 255) 此所デハ Ω/k Abel ノトキ、ソノ Galois 群 $\mathfrak{G}$ ト $G(k/\Omega)$ トノ関係ニツキ注意シタイト思ヒマス。

S.Sasaki. Sci. Rep. Tohoku. Imp. Univ., 29. (1940). 219-267.

$\mathfrak{a}$ ノ不変系ヲ $(n_1, \cdots\cdots n_r)$ n_{i+1}/n_i トシマスト ソレニ対シテ

$\mathfrak{a} = \mathfrak{z}_1 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{z}_r$, $\mathfrak{z}_i = \{\sigma_i\}$ ハ n_i 次 巡回群

ト分解致シマス。ソノトキ．

$$G(k/\Omega)/\Omega_{\mathfrak{a}}^{1-\lambda} = A_2 \times A_3 \times \cdots\cdots \times A_r$$

但シ． $A_i \cong \mathfrak{z}_i \times \mathfrak{z}_{i+1} \times \cdots\cdots \times \mathfrak{z}_r$.

$\Omega_{\mathfrak{a}}^{1-\lambda}$ ハ $\omega^{1-\lambda}$, $\omega \in \Omega$, $\lambda \in \mathfrak{a}$. 生成スル群 トス.

ナル関係ガ成立シマス。之ヲ証明致シマス。

淡中先生ノ結果ニヨレバ. $G(k/\Omega) = \left(\frac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}}, \Omega_{\mathfrak{a}}^{1-\lambda}\right)$ デアルガ.
σ, τ ハ $\mathfrak{a}$ ノ元 スベテヲ取ル必要ハナク. (1) ノ σ_i ニ関スルモノノミニテ十分デアル。即チ.

L.1. $$G(k/\Omega) = \left(\frac{a_{\sigma_i,\sigma_j}}{a_{\sigma_j,\sigma_i}}, \Omega_{\mathfrak{a}}^{1-\lambda}\right)$$ 但シ $(a_{\sigma,\tau})$ ハ Exponent ガ $(\Omega:k)$ ナル Ω/k ノ因子団トスル.

証明．帰納法ニヨル。$\mathfrak{n} = \mathfrak{z}_1 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{z}_{r-1}$ トシ. 之ニ対スル体ヲ N トスルト

$N_{\Omega/k}(A) = 1$ ナル A ヲトレバ

(3) $$N_{\Omega/N}(A) = n^{1-\sigma_r} \qquad n \in N$$

$n' \equiv a_{\sigma,n}$ mod $N^{*}_{\Omega/N}$ デアルカラ. $\sigma = \prod_i \sigma_i^{x_i}$ トスレバ.

(4) $$\equiv \prod_i a_{\sigma_i,n}^{x_i} \quad \text{mod. } N^{*}_{\Omega/N}$$

(3),(4)ヨリ．$N_{\Omega/N}(A) = \left(\prod_i a_{\sigma_i,n}^{x_i} \cdot N_{\Omega/N}\,\omega\right)^{1-\sigma_r}$

$$= \prod_i \left(a_{\sigma_i,n}^{1-\sigma_r}\right)^{x_i} \quad N_{\Omega/N}(\omega^{1-\sigma_r}) = N_{\Omega/N}\left(\prod_i \left(\frac{a_{\sigma_r,\sigma_i}}{a_{\sigma_i,\sigma_r}}\right)^{x_i} \cdot \omega^{1-\sigma_r}\right)$$

故ニ 帰納法ノ仮定ニヨリ

$$G(k/\Omega) = \left(\frac{a_{\sigma_i,\sigma_j}}{a_{\sigma_j,\sigma_i}}, \Omega_{\mathfrak{a}}^{1-\lambda}\right)$$

次ニ．簡単ナ場合ニ関シテ. Lemma ヲ述ベル。H/k Abel ヲ拡大．

Galois群 $\mathfrak{g}$ ノ不変系ヲ (n_1, n_2) n_2/n_1 トス。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_1 \times \mathfrak{z}_2$ $\mathfrak{z}_i = \{\tau_i\}$ ハ n_i 次ノ巡回群.

(a') ヲ Exponent ガ $(H:k)$ ナル H/k ノ因子団トスレバ L.1.ヨリ.

$$G(k/H) = \left(\frac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}, H_{\mathfrak{g}}^{1-\lambda}\right)$$

デアルガ. $\frac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}$ ノ mod. $H_{\mathfrak{g}}^{1-\lambda}$ ノ位数ニツイテ. 次ノ Lemma ガ成立スル。

L.2. $\left(\dfrac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}\right)^x \in H_{\mathfrak{z}}^{1-\lambda}$ ナラバ $n_2 | x$.

証明. $\mathfrak{z}_i$ ニ対応スル中間体ヲ H_i トスル。

$$\left(\frac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}\right)^x \in H_{\mathfrak{z}}^{1-\lambda} \quad \text{ナル故} \quad \left(\frac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}\right)^x = k_1^{1-\tau_1} k_2^{1-\tau_2}$$

両辺ノ N_{H/H_2} ヲ作ル。

$$\text{左辺} = N_{H/H_2}\left(\frac{a'_{\tau_1,\tau_2}}{a'_{\tau_2,\tau_1}}\right)^x = \left(a'^{\,1-\tau_1}_{\tau_2,\mathfrak{z}_2}\right)^x = \left(a'^{\,x}_{\tau_2,\mathfrak{z}_2}\right)^{1-\tau_1}$$

$$= \left(a'_{\tau_2^x,\mathfrak{z}_2}\cdot N_{H/H_2} k''\right)^{1-\tau_1}$$

$$\text{右辺} = N_{H/H_2}\left(k_1^{1-\tau_1}\right)$$

$$\therefore \quad \left(a'_{\tau_2^x,\mathfrak{z}_2}\right)^{1-\tau_1} = \left(N_{H/H_2}\theta\right)^{1-\tau_1}$$

(5) $\therefore \quad a'_{\tau_2^x,\mathfrak{z}_2} = \alpha\cdot N_{H/H_2}\theta \qquad \alpha\in k.$

然ルニ $\alpha \in N^*_{H/H_2}$ デアル。[1]

$\alpha\in H_2$ ト考ヘテ, k ニ対スル Norm ハ

$$N_{H_2/k}\alpha = \alpha^{n_1} = \left(\alpha^{\frac{n_1}{n_2}}\right)^{n_2} \in N^*_{H_1/k}$$

故ニ 局所類体論ノ Verschiebungssatz ニヨリ.

(6) $\alpha \in N^*_{H/H_2}$

従ッテ (5), (6) ヨリ.

$$a'_{\tau_2^x,\,\mathfrak{z}_2} \in N^*_{H/H_2} \qquad \therefore \quad \tau_2^x = 1$$

再ビ Ω/k ニ戻リ L.1 ノ記号ヲ用ヒル。

L.3. $\left(\dfrac{a_{\sigma_i,\sigma_j}}{a_{\sigma_j,\sigma_i}}\right)^{n_j} \in \Omega_{\mathfrak{n}}^{1-\lambda}$ 但シ $i<j$

証明 $\mathfrak{z}_j$ ニ対スル体ヲ Z_j トスレバ, Ω/Z_j ハ巡回体。一方

$$N_{\Omega/Z_j}\left(\frac{a_{\sigma_i,\sigma_j}}{a_{\sigma_j,\sigma_i}}\right) = \left(a^{n_j}_{\sigma_j,\mathfrak{z}_j}\right)^{1-\sigma_i} = \left(a_{\sigma_j^{n_j},\mathfrak{z}_j} N_{\Omega/Z_j} c\right)^{1-\sigma_i}$$

$$= N_{\Omega/Z_j} c^{1-\sigma_i}$$

$$\left(\frac{a_{\sigma_i,\sigma_j}}{a_{\sigma_j,\sigma_i}}\right)^{n_j} = c^{1-\sigma_i} d^{1-\sigma_j} \in \Omega_{\mathfrak{n}}^{1-\lambda}$$

1) 此ノ下ノ 此ノ証明ハ淡中先生ニ依ル。元ノ証明ハ更ニ 複雑デアッタ。

定理． $G(k/\Omega)\Omega_{\alpha}^{1-\lambda}=A_2\times A_3\times\cdots\cdots\times A_r$

$$A_i=Z_{i.i+1}\times Z_{i.i+2}\times\cdots\cdots\times Z_{i.r}$$

$Z_{i;j}$ ハ $\dfrac{a_{\sigma_i.\sigma_j}}{a_{\sigma_j.\sigma_i}}$ mod $\Omega_{\alpha}^{1-\lambda}$ ニヨリ生成サレ $\mathfrak{z}_j$ ＝同型。

証明

$$(7)\cdots\cdots\cdots\prod\left(\frac{a_{\sigma_i.\sigma_j}}{a_{\sigma_j.\sigma_i}}\right)^{x_{i,j}}\in\Omega_{\alpha}^{1-\lambda}$$

ナル関係式アリトスル．任意ノ $i<j$ ヲトリ． $\mathfrak{z}_i\times\mathfrak{z}_j$ ヲ除イタ他ノ直積因子ヲ $\mathfrak{n}'$．ソレニ対スル体ヲ Z トシ．(7) ノ両辺ノ $N_{\Omega/Z}$ ヲ作ル．

$$N_{\Omega/Z}\left(\frac{a_{\sigma_p.\sigma_t}}{a_{\sigma_t.a_p}}\right)=1 \qquad \begin{array}{l}t\neq i.j\\ p\neq i,j\end{array}$$

$$N_{\Omega/Z}\left(\frac{a_{\sigma_i.\tau}}{a_{\tau.\sigma_j}}\right)=a_{\tau.\pi}^{1-\sigma_i}$$

デアルカラ (7) ハ

$$\left(\frac{a_{\sigma_i.\sigma_j}^{\pi}}{a_{\sigma_j.\sigma_i}}\right)^{x_{i.j}}\in Z_{\mathfrak{z}_i\times\mathfrak{z}_j}^{1-\lambda}$$

トナルガ．Chevalley ニヨリ．$(a_{\sigma_i.\sigma_j}^{\pi})$ ハ多元体ニ対応スル Z/k ノ因子団デアル． 故ニ．L.2 ヨリ．

$$n_j\mid x_{i.j}$$

従ッテ L.3 ヨリ．(7) ニテ $\dfrac{a_{\sigma_i.\sigma_j}}{a_{\sigma_j.\sigma_i}}$ ナル項ハ本質的ニハ現ハレナイ。

i.e. (7)ナル式ハ．本質的ニハ存在シナイ。 q.e.d.

此ノ定理ノ直接ノ結論トシマシテ．松島先生ノ結果（談話1113）ガ得ラレマス．

系 Ω/k abel ノトキ $G(k/\Omega)=\Omega_{\alpha}^{1-\lambda}$ ナラバ Ω/k ハ巡回拡大デアル．

Ω/k ヲ Galois 拡大トスルトキ、此ノ結果ハソノママ成立致シマセン．例ヘバ Galois 群 $\mathfrak{g}$ ガ．$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$．$\mathfrak{g}'$ 共ニ巡回群ノヤウナ Galois 拡大 Ω/k ヲトリマスト．

$$G(k/\Omega)=\Omega_{\mathfrak{g}}^{1-\lambda}$$

ナルコトガ証明サレマス．

§2 今マデハ abel 拡大ニ限ッテキマシタガ. 次ニ 任意ノ有限拡大 K/k ノ $G(k/K)$ ニツイテ 考ヘテ見マス。 k 上ノ無限 abel 拡大 $\bar{A}$ ニ対スル局所規範剰余ノ部群 $H(\bar{A}/k)$ ハ次ノ如ク定義サレマス.

$$H(\bar{A}/k) = \bigcap_{A} N^{*}_{A/k}$$

此所デ A ハ k 上ノ 有限次 abel 拡大デ $\bar{A}$ ノ 部分体トナルモノ全体ヲ動クトシマス.

L.4 k 上ノ最大 abel 拡大体ヲ Ω トスレバ

$$H(\Omega/k) = 1$$

証明. $\alpha \in H(\Omega/k)$, $\alpha = P^{\varepsilon} \cdot e$ 但シ $(P) = \mathfrak{p}$ ハ k ノ素 ideal e ハ単数トス。 ソノトキ $\varepsilon = 0$ デアル。

$\varepsilon \neq 0$ ナラバ. 単数全体ノナス部群ヲ E トシ $|\beta| > |\varepsilon|$ ナル整数 β ヲトリ P^{β} ト. E トノ生成スル群ヲ H_0 トスレバ. 明カニ $(k^{*} : H_0) < \infty$ 故ニ H_0 上ノ級体 A_0 ガ存在スル $\alpha \in H(\Omega/k) < N^{*}_{A_0/k} = H_0$ デアルガ H_0 ノ構成法カラ. $\alpha \notin H_0$ トナリ. 矛盾トナル。 $\therefore \varepsilon = 0$.

$\alpha = 1$ 若シ $\alpha \neq 1$ ナラバ 十分大ナル n ニ対シテ.

$$\alpha \not\equiv 1 \mod \mathfrak{p}^{n}$$

ソノトキ $\quad e_n \equiv 1 \mod \mathfrak{p}^{n}$

ナル e_n ノナス乗法群ヲ E_n トシ. $H_n = (P, E_n)$ トスレバ. 明カニ H_n 上ノ級体 A_n ガ存在シ $\alpha \in H_n$ デナクテバナラス。 一方 ソノ作リ方ヨリ. $\alpha \notin H_n$ デ矛盾トナル。

定理.2. K/k ヲ有限拡大トスレバ.

$$G(k/K) = H(K\Omega/K)$$

証明 明カニ $G(k/K) < H(\Omega/K)$

逆ニ $\Theta \in H(\Omega K/K)$ ヲトリ $\theta = N_{K/k}\Theta$ トスル

$\theta = 1$ ナラバ k 上ノ abel 拡大 A ガ存在シテ (L.4)

$$\theta \in N^{*}_{A/k}$$

A ヲ十分大キクトッテモ差支ヘナイカラ. $A \supseteq K$ トスル。ソノトキ A/K ハ abel 拡大.

$$Ⓗ \in N^{*}_{AK/K}$$

故ニ Verschiebungssatz ニヨリ

$$N_{K/k}Ⓗ = \theta \in N^{*}_{A/k}$$

之ハ矛盾デアル。　　$\theta = 1$　　q. e. d.

此ノ直接ノ結論トシテ 次ノコトガ云ヘマス。

系.　k上ノ有限拡大体ヲ K, K上ノ Abel 拡大体ヲ A トスレバ A/k ガ Abel 拡大トナルタメノ 必要十分條件ハ.

$$G(k/K) \subset N^{*}_{A/K}$$